Societatea de Științe
Matematice din Romania

Liceul Teoretic ”Ion Luca”
Vatra Dornei

Concursul Interjudețean de Matematică

„Memorialul *Ștefan Dârțu*” – ediția a XXI-a

Vatra Dornei, 7 decembrie 2019

CLASA a IX -a

Problema 1.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale definit prin $a_{2k-1} = 2k-1$ şi $a_{2k} = a_k$, $\forall k \geq 1$.

a) Calculați $a_{2019} - 4 \cdot a_{2020} + a_{2048}$.

b) Să se arate că $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq \dfrac{n^2+2}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2.

Fie $a > 0$ și $x, y \in [0, \infty)$ astfel încât $x^2 + y^2 = a^2$. Determinați valoarea maximă a expresiei

$$xy + a \cdot \max\{x, y\}.$$

Problema 3.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și ABC un triunghi echilateral cu laturile de lungime *n*. Fiecare latură a triunghiului *ABC* se împarte în *n* segmente de lungime 1, iar prin capetele acestor segmente se duc paralele la laturile *AB*, *BC*, respectiv *AC*.

a) Arătați că prin acest procedeu suprafața triunghiului *ABC* se partiționează în n^2 triunghiuri echilaterale cu laturile de lungime 1.

b) Notăm cu *V* mulțimea tuturor vârfurilor acestor triunghiuri de latură 1 și fie $N = \text{card}(V)$. Demonstrați că *N* este divizibil cu 3 dacă și numai dacă n nu este divizibil cu 3.

c) Considerăm *n* nedivizibil cu 3. O treime din cele N puncte ale mulțimii *V* se colorează cu roșu, o treime cu galben și o treime cu albastru. Notăm $\overrightarrow{s_A} = \sum\limits_{M \in Vr} \overrightarrow{AM}$, unde suma se face după mulțimea *Vr* a vârfurilor roșii, $\overrightarrow{s_B} = \sum\limits_{M \in Vg} \overrightarrow{BM}$, unde suma se face după mulțimea *Vg* a vârfurilor galbene și $\overrightarrow{s_C} = \sum\limits_{M \in Va} \overrightarrow{CM}$, unde suma se face după mulțimea *Va* a vârfurilor albastre.

Să se arate că $\overrightarrow{s_A} + \overrightarrow{s_B} + \overrightarrow{s_C} = \vec{0}$.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. **Timp de lucru: 3 ore**

Succes!!!

Societatea de Științe
Matematice din Romania

Liceul Teoretic ”Ion Luca”
Vatra Dornei

Concursul Interjudețean de Matematică

„Memorialul *Ștefan Dârțu*” – ediția a XXI-a

Vatra Dornei, 7 decembrie 2019

CLASA a X -a

Problema 1.

Fie a și b două numere reale de același semn și z un număr complex astfel încât $\operatorname{Re}\left(\dfrac{a+zi}{b+z}\right)=0$ și $\operatorname{Im}\left(\dfrac{a+z}{b+zi}\right)=0$. Să se arate că $|z|=\sqrt{ab}$.

Problema 2.

Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Să se găsească toate numerele reale x care verifică relația:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)^x+\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^x\right)=2(n+1)^2.$$

Problema 3.

Fie n un număr natural nenul și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea

$$f(1+x)=f(1-x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

astfel ca ecuația $f(x)=0$ are exact n soluții distincte: $x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze suma $x_1+x_2+\ldots+x_n$.

b) Dați exemplu de astfel de funcție.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. **Timp de lucru: 3 ore**

Succes!!!

Societatea de Științe
Matematice din Romania

Liceul Teoretic "Ion Luca"
Vatra Dornei

Concursul Interjudețean de Matematică

„Memorialul *Ștefan Dârțu*" – ediția a XXI-a

Vatra Dornei, 7 decembrie 2019

CLASA a XI –a

Problema 1.

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$. Dacă există $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$ astfel încât $(AB)^k = (BA)^k$, demonstrați că $AB = BA$.

Problema 2.

Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin relația de recurență $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = a_n + 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}},\ \forall n \geq 1$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 2$.

Problema 3.

a) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq n^2$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) = \infty$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right)$.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. **Timp de lucru: 3 ore**

Succes!!!

Societatea de Științe
Matematice din Romania

Liceul Teoretic ”Ion Luca”
Vatra Dornei

Concursul Interjudețean de Matematică

„Memorialul *Ștefan Dârțu*” – ediția a XXI-a

Vatra Dornei, 7 decembrie 2019

CLASA a XII -a

Problema 1.

Fie $(G,\cdot)$ un grup și $a,b,c\in G$ astfel încât $ab^2=c$ și $cb^3=a$.

a) Dacă grupul *G* are 2019 elemente, arătați că $a=c$.

b) Rămâne valabil rezultatul de la punctul **a)** dacă grupul *G* are 2020 elemente?

Problema 2.

a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care verifică relaţia $(f(x))^{2019}+f(x)-x=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Demonstrați că funcția f admite primitive.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care verifică relaţia $(f(x))^{2019}-f(x)+x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Demonstrați că funcția f nu admite primitive.

Problema 3.

a) Arătați că pentru orice $a>1$ avem $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln x}{x^2+1}dx=0$.

b) Să se arate că $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\cdot\int_1^n\frac{\ln x}{x^2+n}dx=\frac{\pi}{4}$.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7. **Timp de lucru: 3 ore**

Succes!!!